進研模試数学

問題 5

等差数列{ a_n }があり、$a_8=31$、$a_2+a_3+a_4=33$ を満たしている。
また数列{ b_n }があり、$b_1=2$、$b_{n+1} = 3b_n + 2$ (n=1,2,3, ...)を満たしている。

(1) 数列{ a_n }の一般項 a_n を n を用いて表せ。

（解答）
$a_n = a + (n-1) d$ とおくと、

$a_8 = a + 7d = 31$ …①
$a_2+a_3+a_4 = a + d + a + 2d + a + 3d = 3a + 6d =33$ …②

①、②を解いて $a = 3$、$d = 4$
よって
$a_n = a + (n-1) d = 3 + (n - 1) \times 4 = 4n -1$ （答）

(2) 数列{ b_n }の一般項 b_n を n を用いて表せ。

（いわゆる特性方程式ネタ）
$c = 3c + 2$ より $c = -1$
よって元の漸化式は
$b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$
と変形できる。
（c=-1 なので中身がそれぞれプラスに転じていることに注意）
ここで　$d_n = b_n + 1$ とおけば、
（d は他と被ってなければどの文字でもよい）
$d_{n+1} = 3 d_n$
と変形できる。
（これはただの等比数列）
$d_1= b_1 +1 = 2 + 1 = 3$
なので d_n は初項 3、公比 3 の等比数列になる。
よって d_n の一般項は
$d_n= 3 \times 3^{n-1} = 3^n$

よって b_n の一般項は
$b_n = d_n - 1$
　$= 3^n - 1$ （答）

(3) $S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k+a_k+b_k)$とする。$S_n$をnを用いて表せ。

（まあ代入しますか…）

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\{(4k-1)(3^k-1)+(4k-1)+(3^k-1)\}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\{4k3^k-4k-3^k+1+4k-1+3^k-1\}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(4k3^k-1)$$ （結構消えてくれた！）

$$S_n=4\sum_{k=1}^{n}k3^k-\sum_{k=1}^{n}1$$ （バラバラにする）

$$S_n=4\sum_{k=1}^{n}k3^k-n \quad \cdots①$$

（ここで$\sum_{k=1}^{n}k3^k$だけを考える）

$S'_n=\sum_{k=1}^{n}k3^k$とすると、

$$S'_n=1\cdot3^1+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\cdots+n3^n \quad \cdots②$$

（ここで例の公比をかけて１個ずらすことを考える）

$$3S'_n=1\cdot3^2+2\cdot3^3+3\cdot3^4+\cdots+n3^{n+1} \quad \cdots③$$

②―③より、

$$-2S'_n=1\cdot3^1+1\cdot3^2+1\cdot3^3+\cdots+1\cdot3^n-n3^{n+1}$$

（この中で$1\cdot3^1+1\cdot3^2+1\cdot3^3+\cdots+1\cdot3^n$は単に初項３、公比３、項数ｎの等比数列の和なので、そのまま公式が使える。

$$-2S'_n=\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n3^{n+1}$$

$$-2S'_n=\frac{3^{n+1}-3}{2}-n3^{n+1}=\left(\frac{1}{2}-n\right)3^{n+1}-\frac{3}{2}$$

よって

$$S'_n=\frac{2n-1}{4}3^{n+1}+\frac{3}{4}$$

①に戻して

$$S_n=4\left(\frac{2n-1}{4}3^{n+1}+\frac{3}{4}\right)-n=(2n-1)3^{n+1}+3 \quad \text{（答）}$$

（なんじゃあこりゃあ…！　ほんとお疲れ様でした）